RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR

Juin 1998

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS d'ENTRÉE en PREMIÈRE ANNÉE

Spécialité : Mathématiques–Physique

Deuxième Epreuve de Mathématiques Durée : 4 heures

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin porté à la présentation.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ une fonction continue vérifiant

$$f(t+s) = f(t)f(s), \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}$$

1-a) Que vaut $f(0)$?

1-b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^\alpha f(u)\,du \neq 0$.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Donner une relation simple entre f et sa dérivée f', puis calculer f à l'aide du nombre complexe $a = f'(0)$.

3-a) Quels sont les nombres a pour lesquels $|f(t)| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$? Quels sont alors les réels t pour lesquels $f(t) = 1$?

3-b) Quels sont les nombres a pour lesquels $f(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$?

4) Déterminer les fonctions continues $F :]0, \infty[\to \mathbb{C}^*$ vérifiant

$$F(uv) = F(u)F(v), \quad \forall\, u, v > 0$$

Soit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et soit $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}^*$ une fonction continue vérifiant

$$g(z_1 z_2) = g(z_1)g(z_2), \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{T}$$

5-a) Montrer que $|g(z)| = 1$ pour tout $z \in \mathbb{T}$.

5-b) En utilisant la question 3), montrer qu'il existe un entier relatif n tel que $g(z) = z^n$.

Soit $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ une fonction continue vérifiant

$$h(z_1 z_2) = h(z_1)h(z_2), \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$$

6) Démontrer qu'il existe un nombre complexe a et un entier relatif n tels que

$$h(z) = |z|^a \left(\frac{z}{|z|}\right)^n, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}^*$$

7) On suppose, en plus, que h est un automorphisme de groupe de $\mathbb{C}^*$. Déterminer h.

Exercice 2. On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace des matrices complexes M d'ordre 2 et telles que ${}^t\overline{M} = M$.

1) Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $M \in \mathcal{H}$. On désigne par (x, y, z, t) ses coordonnées dans la base (A, B, C, I). Calculer $\Delta(M) = \det(M)$ en fonction de (x, y, z, t). En déduire que $\Delta : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R}$ est une forme quadratique non dégénérée dont on précisera la signature.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients complexes, de déterminant égal à 1.

3) Montrer que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la multiplication des matrices. Montrer que si $g \in \mathcal{G}$ et $M \in \mathcal{H}$, alors $gM{}^t\overline{g} \in \mathcal{H}$.

Pour $g \in \mathcal{G}$, on désigne par $T(g)$ l'endomorphisme de $\mathcal{H}$ défini par

$$T(g)M = gM{}^t\overline{g}$$

4-a) Montrer que $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$, $\forall g_1, g_2 \in G$.

4-b) Soit $g \in \mathcal{G}$ tel que $T(g) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, montrer que $gM = Mg$, $\forall M \in \mathcal{H}$. Déterminer alors tous les éléments $g \in \mathcal{G}$ tels que $T(g) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

5) Montrer que pour tout $g \in \mathcal{G}$ et tout $M \in \mathcal{H}$, on a $\Delta(T(g)M) = \Delta(M)$.

6) Soit $g \in \mathcal{G}$ tel que $g{}^t\overline{g} = I$. Montrer que la matrice $\theta(g)$ de $T(g)$, dans la base (A, B, C, I), est de la forme

$$\theta(g) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & P & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où P est une matrice orthogonale 3×3.

7) Soit $\alpha = re^{it}$, avec $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, et soit

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $T(g)$.

Exercice 3.

1) Soit $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et z_0 un nombre complexe tels que $\alpha(0) = e^{2i\pi z_0}$.

a) Montrer qu'il existe une unique application β de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\begin{cases} \alpha(t) = e^{2i\pi\beta(t)} \\ \beta(0) = z_0 \end{cases}$$

b) On suppose que $\alpha(0) = \alpha(1)$. Montrer que $\beta(1) - \beta(0)$ est un entier indépendant du choix de z_0.

On désigne par degré de α, et on note $d^0\alpha$, l'entier $\beta(1) - \beta(0)$.

2) Déterminer le degré de l'application $\alpha_n : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ définie par

$$\alpha_n(t) = e^{2i\pi nt}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

3) Soit r un réel positif différent de 1. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $\alpha_r(t) = 1 - re^{2i\pi t}$

a) Calculer, en fonction de r,

$$\int_0^1 \frac{e^{2i\pi t}}{1 - re^{2i\pi t}}\, dt$$

b) Calculer le degré de α_r.

4) Soit $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant

$$H(0,s) = H(1,s), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on considère l'application $H_s : t \to H(t,s)$, $0 \leq t \leq 1$. Montrer que le degré de H_s est indépendant de s.

5) Soit S^1 le cercle unité. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^*$, de classe $\mathcal{C}^1$ dont la restriction à S^1 soit égale à l'identité. (On pourra considérer l'application $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ qui à (t,s) associe $f(s\cos 2\pi t, s \sin 2\pi t)$).